

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАБРУДНЕННЯ ТЕРИТОРІЇ ШКІДЛИВИМИ ВИКИДАМИ В АТМОСФЕРУ ВІДХОДІВ ПРОМИСЛОВИХ ПІДПРИЄМСТВ

На основі розв'язку задачі про далекість польоту при дії вітру матеріальної частинки з відомими механічними параметрами (діаметр, густина, початкова вертикальна швидкість), яка вилітає з високої вертикальної труби, здійснюється наближена оцінка забруднення території шкідливими викидами в атмосферу продуктів функціонування об'єктів промислового виробництва.

Ключові слова: викиди в атмосферу, забруднення території, частинка, далекість польоту частинки, задача Коші.

На основе решения задачи о дальности полета при действии ветра материальной частицы с известными механическими параметрами (диаметр, плотность, начальная вертикальная скорость), которая вылетает из высокой вертикальной трубы, осуществляется приближенная оценка загрязнения территории вредными выбросами в атмосферу продуктов функционирования объектов промышленного производства.

Ключевые слова: выбросы в атмосферу, загрязнение территории, частица, дальность полета частицы, задача Коши.

The approximate estimation of territory contamination by the harmful industrial air-pollution is made by using the problem solution on flight distance at the wind action of the taking off from a high vertical pipe separate particle with the known mechanical parameters (diameter, density, initial vertical velocity).

Key words: air pollution, territory contamination, particle, flight distance, Koshi problem.

Проблема, якій присвячена стаття. Україна сьогодні є промислово розвинутою країною, з дещо застарілими технологіями та системами очищення продуктів функціонування виробництв, які забруднюють навколишнє середовище. Майже кожне промислове підприємство (хімічне, цементне, нафтопереробне, енергогенеруюче тощо) щомиті викидає в атмосферу величезну кількість токсичних речовин у вигляді газоподібних, рідких чи твердих мікрочастинок і, таким чином, забруднює повітря і навколишню територію за рахунок осідання на поверхні землі вказаних часток в районі розміщення виробництва.

Техногенні викиди становлять серйозну проблему, пов'язану з забрудненням ґрунтів в зоні промислових підприємств. Обстеження показали, що забруднення території навколо багатьох металургійних комбінатів,

заводів, шахт, підприємств енергетики відповідає небезпечному та помірно-небезпечному рівню [1]. У містах основним джерелом забруднення ґрунтів важкими металами є підприємства чорної та кольорової металургії, важкої промисловості, теплоелектроцентралі [2]. Небезпека забруднення ґрунтів визначається не тільки кількісними показниками вмісту сторонніх домішок, а й класом їх небезпеки. Тому актуальним є питання математичного моделювання забруднення території шкідливими викидами в атмосферу продуктів функціонування об'єктів промислового виробництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показує, що математичне моделювання процесів поширення атмосферних забруднень сьогодні проводиться, в основному, за двома напрямками: на основі статистичної теорії, кінцевим результатом

якої є гаусова модель розподілу домішок в хмарі викиду (методика Пасквілла-Брайанта) та модель градієнтного переносу через припущення пропорційності потоку домішки градієнту її концентрації у повітрі (К-теорія) [2; 3]. Існують методики та комп'ютерні програми моделювання розсіювання атмосферних забруднень (ОНД-86, «ЕОЛ-2000» тощо) [4; 5]. Усі ці моделі в якості вихідних даних вимагають значення концентрацій забруднюючих речовин у трубі або обсягів викидів продуктів функціонування об'єктів промислового підприємства [3; 4; 5]. Однак інформація про масштаби забруднення навколишнього середовища з різних міркувань або приховується, або взагалі відсутня. З цієї причини оцінку ступеня забруднення повітря та території навколо об'єктів промислового виробництва слід виконувати, використовуючи непрямі методи.

Метою даної роботи є наближена оцінка забруднення території шкідливими викидами в атмосферу продуктів функціонування промислового підприємства на основі розв'язку задачі Коші про траєкторію ізольованої матеріальної частинки, що рухається під дією відомих сил навколишнього середовища: вітру, земного тяжіння і опору повітря.

Постановка задачі. При розв'язку задачі про траєкторію руху матеріальної частинки використовуватимемо наступні припущення як спрощувальні:

- джерелом викидів є виробнича труба, яка підіймається вертикально над поверхнею землі і має відому висоту h ;
- всі частинки незалежно від їх діаметра вилітають з труби з однаковою початковою вертикальною швидкістю v_0 ;
- матеріальна частинка є абсолютно тверде тіло з двома ступенями свободи;
- матеріальна частинка є кулькою із заданим діаметром d та відомою густиною матеріалу ρ ;
- взаємодія частинки з іншими частинками відсутня (розглядається рух ізольованої частинки);
- частинка рухається в полі сил земного тяжіння;
- рушійною силою є сила вітру;
- опір середовища зводиться до опору повітря рухові частинки;
- швидкість вітру u_0 є сталою як за напрямком, так і за величиною;
- всі напрямки вітру в межах від нуля до 360° є рівноймовірними;
- рух частинки є плоским, причому площиною руху є вертикальна площина, в якій розміщується вектор швидкості вітру та вектор прискорення вільного падіння.

Для розв'язку задачі про траєкторію руху матеріальної частинки, що викидається з труби, використовуємо прямокутну декартову систему координат OXY , початок якої точка O розміщується на поверхні землі, вісь OX співпадає з цією поверхнею, а OY напрямлена вертикально вгору і співпадає з віссю труби.

Диференціальні рівняння руху частинки. Рівняння руху частинки представляють собою систему двох диференціальних рівнянь другого порядку, які описують траєкторію як плоску криву,

що розміщується в площині OXY . При цьому на частинку діють такі категорії сил:

- сили інерції

$$m\ddot{x}, \quad m\ddot{y},$$

де $m = (\pi/6)\rho d^3$ – маса частинки, x та y – переміщення частинки в горизонтальному та вертикальному напрямках, а крапкою над символом позначено диференціювання за часом t ;

- рушійна сила зумовлена вітром

$$\frac{\pi}{8}c\rho_a u_0 d^2,$$

де c – гідродинамічний коефіцієнт [7], ρ_a – густина повітря;

- сила тяжіння

$$-mg,$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння;

- сили опору повітря

$$-\frac{\pi}{8}c\rho_a \dot{x}^2 d^2,$$

$$-\frac{\pi}{8}c\rho_a \dot{y}^2 d^2.$$

Згідно з другим законом Ньютона диференціальні рівняння руху частинки можна представити у вигляді двох незалежних диференціальних рівнянь другого порядку

$$m\ddot{x} = \frac{\pi}{8}c\rho_a u_0 d^2 (u_0^2 - \dot{x}^2),$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{\pi}{8}c\rho_a u_0 d^2 \dot{y}^2,$$

які слід доповнити початковими умовами при $t = 0$:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h,$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Зведення диференціальних рівнянь до безрозмірного вигляду і їх розв'язок. З метою надання отриманим результатам більшої загальності та для зручності проведення числових розрахунків доцільним є представлення рівнянь руху розглядуваної частинки через безрозмірні змінні. Умовимось як масштаб для лінійних величин вибрати висоту труби h , а як масштаб часу – час t_0 вільного падіння частинки з висоти h :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Безрозмірні змінні, що відповідають просторовим координатам x , y та часу t , позначимо відповідно через ξ , η та τ . Іншими словами, представимо x , y та час t наступним чином:

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad t = t_0\tau.$$

Через безрозмірні змінні диференціальні рівняння руху матеріальної частинки (після простих перетворень) можна записати у вигляді наступних задач Коші:

$$\xi'' + k\xi'^2 = A, \quad \xi(0) = 0, \quad \xi'(0) = 0,$$

$$\eta'' + k\eta'^2 = -2, \quad \eta(0) = 1, \quad \eta'(0) = \eta'_0,$$

де штрихом позначено диференціювання за змінною τ , а константи k , A та η визначаються за формулами

$$k = \frac{3}{4} c \frac{\rho_a}{\rho} \frac{h}{d}, \quad A = c \frac{t_0^2 u_0^2}{h^2}, \quad \eta'_0 = \frac{v_0 t_0}{h}.$$

Кожне з цих рівнянь є рівнянням з відокремлюваними змінними [6], а тому їх розв'язок принципових труднощів не представляє і може бути записаний у вигляді наступних співвідношень:

$$\xi = \frac{1}{k} \ln ch(\sqrt{Ak}\tau), \quad \eta = 1 + \frac{1}{k} \ln \frac{\cos(\varphi - \sqrt{2k}\tau)}{\cos\varphi},$$

де φ – фазовий кут, значення якого визначається за формулою

$$\varphi = \arctg\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\eta'_0\right).$$

На основі отриманих результатів створено комп'ютерну програму, що дозволяє розрахувати ті механічні елементи руху частинки, які представляють практичний інтерес.

Ілюстративний приклад. Для демонстрації можливостей отриманого розв'язку наведених задач Коші розглянемо конкретну матеріальну частинку, геометрично-масові характеристики якої та деякі з розрахункових параметрів зведені в табл. 1 (не маючи попередньої інформації про реальні частинки, які є результатом функціонування того чи іншого промислового виробництва, у даній роботі вибрано в якості матеріалу частинки воду).

Таблиця 1

Вихідні дані та деякі розрахункові величини

Назва параметру	Розмірність	Значення параметру
Параметри навколишнього середовища		
густина повітря	кг/м ³	1,25
швидкість вітру	м/с	10,00
висота труби	м	35,00
Параметри частинки		
назва матеріалу		вода
густина	кг/м ³	1000
діаметр	мм	2
початкова вертикальна швидкість	м/с	15,00
коефіцієнт опору		0,80
Розрахункові величини		
безрозмірний час польоту		0,55
фазовий кут	рад	1,24
допоміжний коефіцієнт k		13,12
безрозмірна швидкість вітру		0,76
безрозмірна початкова верт. швидкість частинки		1,145
Масштаби розмірних величин		
часу	с	2,67
швидкостей	м/с	13,10
довжин	м	35,00

Для того, щоб скласти певну уяву про залежність форми траєкторії та далькості польоту частинки під дією вітру від її діаметру, вибрано низку діаметрів частинок в межах від 0,1 мм до 0,9 мм і для деяких з них побудовано згадані траєкторії. Результати відповідних розрахунків для вказаних діаметрів представлено на рис. 1. З наведених на рисунку кривих видно, що чим менший діаметр, а отже, і

маса частинки, тим пологішою є траєкторія її руху, і тим на більшу відстань від труби відносить вітер частинку, і таким чином, більша територія в околі розміщення труби виявляється забрудненою шкідливими викидами. На рис. 2 зображено розподіл діаметрів частинок залежно від відстані до труби (або, що те ж саме, від далькості польоту).

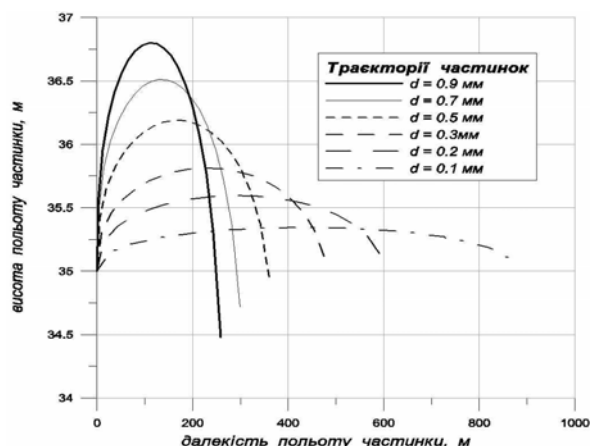


Рис. 1. Форми траєкторій та далькість польоту частинок у функції від їх діаметрів

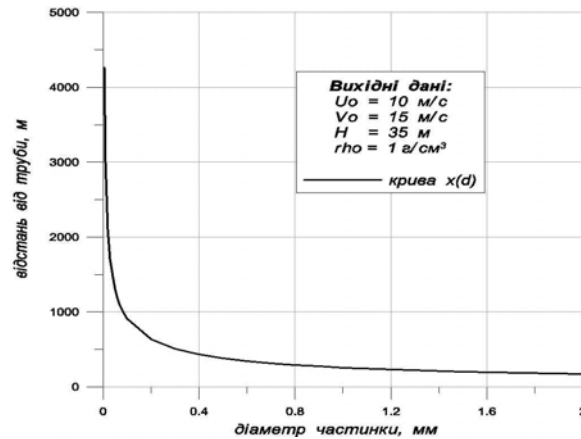


Рис. 2. Розподіл залежності далькості польоту часток від їх діаметра

Представлена на рис. 2 крива залежності відстані, яку пролетить досліджувана частинка, від її діаметра дає змогу уявити якісний стан речей.

Кількісний бік справи прояснюють подані в таблиці 2 числові дані, що стосуються розглядуваної залежності, наданої у табличній формі.

Таблиця 2

Залежність далькості польоту часток від їх діаметра

Відстань від труби, м	Діаметр частинки, мм
168,234	2
201,289	1,5
256,872	1
273,275	0,9
292,672	0,8
316,099	0,7
345,171	0,6
382,59	0,5
433,296	0,4
507,618	0,3
632,324	0,2
913,874	0,1
965,875	0,09
1027,35	0,08
1101,56	0,07
1193,62	0,06
1312,09	0,05
1472,57	0,04
1707,73	0,03
2102,22	0,02
2992,69	0,01
4252,02	0,005

Слід зазначити, що отримані результати дозволяють проаналізувати кінематичні характеристики руху матеріальної частинки заданого діаметру залежно від часу або від відстані до труби, що

фактично означає одну і ту ж залежність, оскільки (див. рис. 3) зв'язок між часом та дальністю польоту частинки майже лінійний.

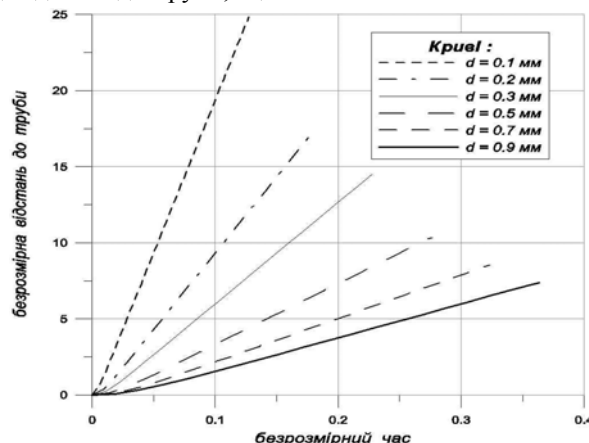


Рис. 3. Залежність далькості польоту частинки від часу

Відомий інтерес в цьому плані представляє розподіл горизонтальної та вертикальної складових

швидкостей частинки у функції від відстані до труби (див. відповідно рис. 4 і рис. 5).

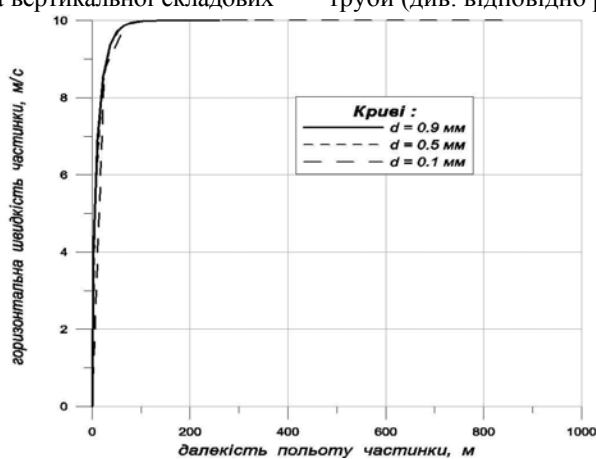


Рис. 4. Розподіл горизонтальної швидкості частинки у функції від відстані до труби

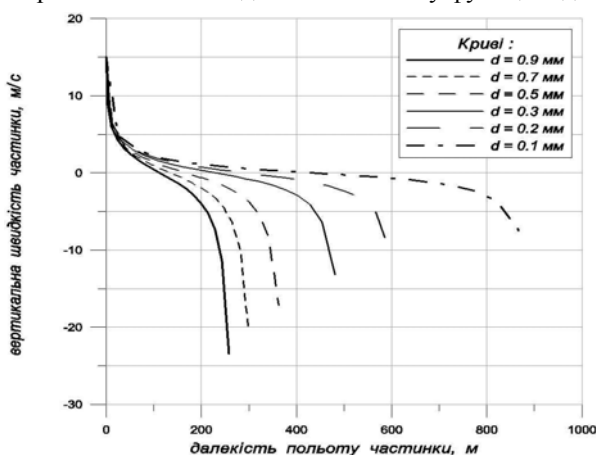


Рис. 5. Розподіл вертикальної швидкості частинки у функції від відстані до труби

Як бачимо з указаних рисунків, горизонтальна складова швидкості частинки фактично не залежить від геометрично – масових параметрів частинки: практично криві для різних діаметрів частинки зливаються в одну криву; вертикальна складова швидкості є індивідуальною для кожного окремого діаметра (маса частинки), оскільки у випадку руху частинки в вертикальному напрямку частинка знаходиться під впливом не тільки сили опору повітря (як це має місце у випадку горизонтальної складової швидкості), а ще і сили земного тяжіння.

Отримані результати (розв'язок рівнянь руху, комп'ютерна програма) дають змогу провести оцінку забруднення території в околі труби у вигляді залежності далькості польоту частинки у функції від розподілу (якщо інформація про такий є):

- густини матеріалу частинки;
- величини та напрямку вектора швидкості вітру;
- початкової вертикальної швидкості частинки при вильоті їх з труби.

Окремо слід відзначити, що, хоча в проведеному дослідженні припускається, що земна поверхня в околі труби є горизонтальною, проте за результатами

роботи не важко врахувати і залежність далькості польоту частинки від геометрії ландшафту і, таким чином, врахувати форму земної поверхні в околі труби.

Висновки

1. У даній роботі задачу про наближену оцінку впливу шкідливих викидів промислового виробництва на навколишнє середовище (зокрема розміри забрудненої території в околі труби) зведено до розв'язку задачі Коші про траєкторію руху ізольованої матеріальної частинки.

2. На основі отриманих результатів теоретичного характеру розроблено алгоритм і створено комп'ютерну програму, яка дозволяє проаналізувати вплив на далькість польоту і, таким чином, на обсяг забруднення території геометрично-масових характеристик матеріальних частинки.

3. Результати проведених розрахунків траєкторії частинки та розподілу частинки у функції від відстані до труби не суперечать сучасним уявленням та експериментальним даним про забруднення території шкідливими викидами промислового виробництва в околі труби.

ЛІТЕРАТУРА

1. Клименко Л.П. Техноекologia. – Одеса: Фонд Екопрінт, 2000. – 544 с.
2. Надточій П.П., Вольвач Ф.В., Гермащенко В.Г. Екологія ґрунту та його забруднення. – К.: «Аграрна наука», 2002. – 285 с.

3. Григор'єва Л.І., Томілін Ю.А. Нормування антропогенного навантаження на навколишнє середовище: Навчальний посібник. – Миколаїв: Видавництво МДГУ ім. Петра Могили, 2005. – 172 с.
4. Бызова Н.Л. Методическое пособие по учету рассеивания примесей в пограничном слое атмосферы по метеорологическим данным. – М.: Гидрометеиздат, 1973. – 346 с.
5. Измалков В.И. Экологическая безопасность, методология прогнозирования антропогенных загрязнений и основы построения экологического мониторинга. – СПб., 1994. – 131 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
7. Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.
8. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1969. – 399 с.
9. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988. – 254 с.
10. Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.

Рецензенти: Дихта Л.М., д.т.н., професор;
Андрєєв В.І., к.т.н., в.о. доцента

© Клименко Л.П., Воскобойнікова Н.О.,
Новосадовський О.О., 2010

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2010 р.